V-19 (1 h, 10 min) 11-Mayo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Funcional y derivada de funcional** **Principio de mínima acción**

Fórmula deTaylor para funciones de varias varibles

Para función de 1 variable (x), la fórmula de Taylor la vimos en (I) del resumen de V-1:

En entorno de x = a: $f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \cdots$

Se puede poner también $f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot \delta x + \frac{f''(x)}{2!} \cdot \delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot \delta x^3 + \cdots$

Para función de 2 variables (x,y) (los subíndices indican derivadas parciales respecto a esa variable):

$$f(x+\delta x, y+\delta x) \approx f(x,y) + \frac{1}{1!}\left[f_x'(x,y)\delta x + f_y'(x,y)\delta y\right] + \frac{1}{2!}\left[f_x''(x,y)\delta x^2 + f_y''(x,y)\delta y^2 + 2\, f_{xy}''(x,y)\delta x \delta y\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[f_x'''(x,y)\delta x^3 + f_y'''(x,y)\delta y^3 + 3\, f_{xxy}'''(x,y)\delta x^2 \delta y + 3\, f_{xyy}'''(x,y)\delta x \delta y^2\right] + \cdots$$

Para función de N variables $(x^1, x^2 \ldots x^N) \equiv (x^j)$ podemos generalizar utilizando notación relativista:

$$\boldsymbol{f(x^j + \delta x^j) \approx f(x^j) + \frac{1}{1!}\left[\partial_\alpha f(x^j) \cdot \delta x^\alpha\right] + \frac{1}{2!}\left[\partial_\alpha \partial_\beta f(x^j) \cdot \delta x^\alpha \delta x^\beta\right] + \frac{1}{3!}\left[\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma f(x^j) \cdot \delta x^\alpha \delta x^\beta \delta x^\gamma\right] + \cdots} \quad \textbf{(I)}$$

Aplicación de fórmula de Taylor a campo asociado a cada punto del espacio-tiempo: $\phi(ct, x, y, z) \equiv \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Convenio de notación relativista de sumatorios: índices latinos van de 1, 2, 3 ; índices griegos van de 0, 1, 2, 3

Es una función de 4 variables, que representamos como $\boldsymbol{\phi(x)}$. Aplicamos la expresión (I) con índices griegos:

$$\boldsymbol{\phi(x+\delta x) \approx \phi(x) + \frac{1}{1!}\left[\partial_\alpha \phi(x) \cdot \delta x^\alpha\right] + \frac{1}{2!}\left[\partial_\alpha \partial_\beta \phi(x) \cdot \delta x^\alpha \delta x^\beta\right] + \frac{1}{3!}\left[\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \phi(x) \cdot \delta x^\alpha \delta x^\beta \delta x^\gamma\right] + \cdots}$$

Se suele cortar la aproximación tras el término de 1º orden y poner: $\boldsymbol{\phi(x+\delta x) \approx \phi(x) + \partial_\alpha \phi(x) \cdot \delta x^\alpha}$ **(II)**

De donde se extrae la variación del campo: $\boldsymbol{\delta\phi \approx \partial_\alpha \phi(x) \cdot \delta x^\alpha}$

Funcional

En una función corriente f(x): se introduce un nª (x = a) y se obtiene otro número f(a)= nº

En Funcional se introduce función ***f (x)*** e intervalo [a b] (muchos números) y se obtiene un número: **S[f(x)$_{ab}$] = nº**

Se expresa como integral de una función de funciones *L*, (Lagrangiana) dependiente de f(x) y f´(x), entre dos puntos fijos [a, b] por donde pasa la función f(x). Hay un valor numérico del funcional de esa función para cada función e intervalo elegido:

$$\boldsymbol{S[f(x)] = \int_a^b L[f(x), f'(x)]\ dx} \qquad \textbf{(III)}$$

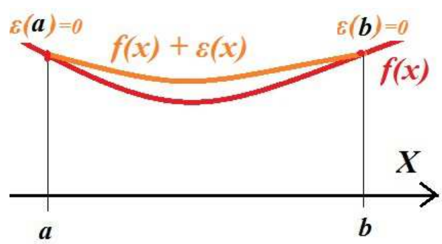
Por ejemplo, un funcional pueda dar como resultado la longitud de una función *f(x)* entre dos puntos fijos:

$\boldsymbol{S[f(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}$ ó en forma paramétrica: $\boldsymbol{S[x(\lambda), y(\lambda)] = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{[x'(\lambda)]^2 + [y'(\lambda)]^2}\ d\lambda}$

Derivada de un funcional [de función de una variable]**: S[*f(x)*]**

Hay que hallar la variación del funcional $\delta S[f(x)]$ al variar la función *f(x)* en una pequeña función **δ*f(x)* ≡ *ε(x)*** en el intervalo [a b]. La variación conmuta con la integral y ponemos:

$$\delta S[f(x)] = \delta \int_a^b L[f(x), f'(x)]\ dx = \int_a^b \delta\, L[f(x), f'(x)]\ dx$$



Cuando la función ***f(x)*** varía en **ε(x)** es fácil comprender que la función derivada ***f´(x)*** variará en la derivada **ε´(x)**.

La variación de la función de funciones $\boldsymbol{L[f, f']}$ se puede obtener como la diferencial de una función de dos variables. También puede obtenerse desarrollarse ***L***[***f+ε*** , ***f´+ε´***] por Taylor, visto antes para función de dos variables, cortando el desarrollo tras el término de 1º orden. En cualquier caso será:

$$\boldsymbol{\delta}\, L[f, f'] = \frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' = \frac{\partial L}{\partial f}\ \boldsymbol{\varepsilon(x)} + \frac{\partial L}{\partial f'}\ \boldsymbol{\varepsilon'(x)}$$

$$\delta S[f(x)] = \int_a^b \boldsymbol{\delta} L[f(x), f'(x)]\ dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\varepsilon\, dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\varepsilon'\ dx$$

Interesa que aparezca ***ε(x)*** en las dos integrales, por lo que la segunda la resolvemos por partes:

$$\left.\begin{array}{ll} u = \frac{\partial L}{\partial f'} & \rightarrow \quad du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)dx \\ dv = \varepsilon'(x)dx & \rightarrow \quad v = \varepsilon(x) \end{array}\right\} \qquad \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\varepsilon'(x)\ dx = \left[\frac{\partial L}{\partial f'}\cdot \varepsilon(x)\ \right]_a^b - \int_a^b \varepsilon(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)dx$$

El corchete se anula, ya que ***ε(a) = ε(b) = 0*** puesto que la función ***f(x)***, aunque se varíe un poco, ha de pasar siempre por esos dos puntos fijos. Por lo tanto, la diferencial del funcional, al variar f(x) en ***δf(x) = ε(x)*** queda:

$$\boldsymbol{\delta} S[f(x)] = \int_a^b \delta L[f(x), f'(x)]\ dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\varepsilon(x)\, dx - \int_a^b \varepsilon(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)dx = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]\varepsilon(x)\, dx$$

Pasar ***ε(x) = δf(x)*** (está dentro de la integral) al primer miembro dividiendo, resulta extraño matemáticamente. Obviamos la integral (si se pusiera la integral la derivada daría un número concreto para ese intervalo concreto) y se suele poner la derivada del funcional:

$$\boldsymbol{\frac{\delta S[f(x)]}{\delta f} = \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)} \qquad \textbf{(IV)}$$

Aplicación en Teoría Cuántica de campos

Se asocia a cada punto del espacio-tiempo plano de Minkowski un campo: ***ϕ(ct, x, y, z) ≡ ϕ(x^0, x^1, x^2, x^3)***

Se define el funcional (Acción) **S [**dependiente de función de 4 variables y 4 derivadas parciales**]:**

$$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{\phi}(x^0, x^1, x^2, x^3)] = \int\int\int\int \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\partial_0},\ \boldsymbol{\partial_1},\ \boldsymbol{\partial_2},\ \boldsymbol{\partial_3}]\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

Es una integral de "volumen espaciotemporal". $\mathcal{L}[\phi,\ \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3]$ es una "densidad lagrangiana".

Al tener la función ϕ varias variables, y operar igual que antes, se puede deducir que la derivada del funcional respecto a la función *ϕ(x^0, x^1, x^2, x^3)* será:

$$\boldsymbol{\frac{\delta S[\phi(x^0,x^1,x^2,x^3)]}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{d}{dx^0}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^0}}\right) - \frac{d}{dx^1}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^1}}\right) - \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^2}}\right) - \frac{d}{dx^3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^3}}\right)} \qquad \textbf{(V)}$$

Principio de mínima acción

De todos los posibles campos ***ϕ(x^0, x^1, x^2, x^3)*** y un funcional (acción) que pueden describir la realidad, sólo son plausibles aquellos de mínima acción, es decir, aquellos cuya derivada funcional es nula:

Compactando con la notación relativista, se igual a cero la derivada: $\boldsymbol{\frac{\delta S[\phi(x)]}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0}$ **(VI)**

Ejemplo: Sea campo ***ϕ(x^0, x^1, x^2, x^3)*** y funcional (acción): $\boldsymbol{S = \int\int\int\int \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)\ d^4x}$

Al hacer la derivada funcional, e igualarla a cero, se llega a la ecuación: $\frac{\partial^2\phi}{\partial {x^0}^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^1}^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^2}^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial {x^3}^2} = 0$

Compactando con notación relativista, esa ecuación es: $\boldsymbol{\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0}$

Esa ecuación es la ecuación de onda, pero en 4 dimensiones, que sabemos en invariante Lorentz.

Teorema (sin demostrar): Si la función de funciones (lagrangiana) ***L*** con la que se define la acción, es invariante Lorentz, la ecuación que se obtendrá al igualar la derivada funcional a cero, también será invariante Lorentz.

La resolución del ejemplo, así como el anterior teorema, se comprueban en la resolución del ejercicio que se plantea

EJERCICIO PLANTEADO Sea $\boldsymbol{L = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi\ \partial^\mu\phi - m^2\phi]}$ y acción $\boldsymbol{S[\phi] = \int\int\int\int \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi\ \partial^\mu\phi - m^2\phi]\ d^4x}$

a) Demostrar que L es invariante bajo las transformadas de Lorentz

b) Calcular $\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi}$